Расчет балки.

Рассмотрим изгиб в плоскости *xy* на примере. Расчленим балку, данную на рис.1 ниже на два элемента разрезая ее в точке A,B,C

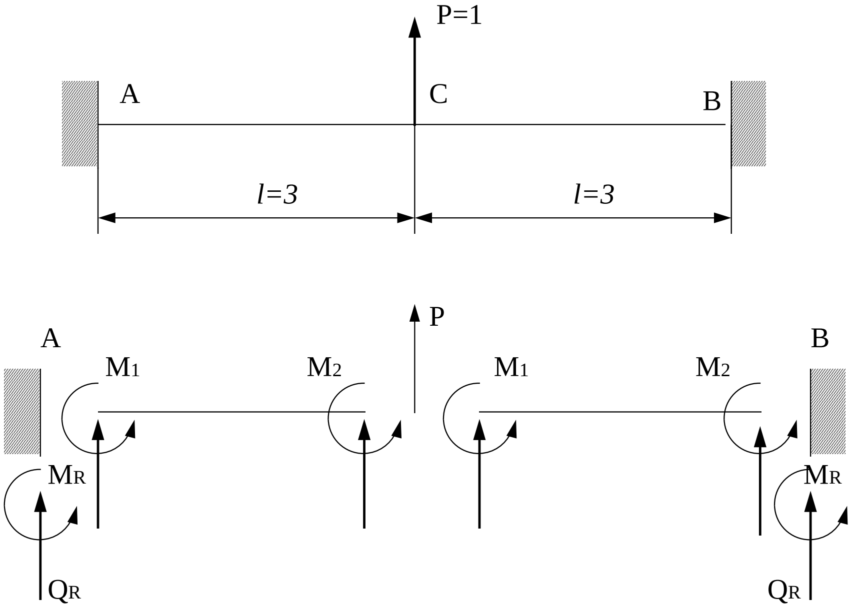


Рис.1. Жестко-защемленная балка с сосредоточенной силой в центре балки.

Составим уравнения равновесия $\sum Q = 0$ и $\sum M = 0$ узлов A,B,C. Уравнения записаны так, чтобы можно было явно просмотреть вклад каждого элемента. Это сделано для того, чтобы легче было составить алгоритм решения

1 эл. 2 эл.

$$
\begin{array}{r|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c}
u_1 = \sum Q_A = & Q_1 & + & 0 & + & Q_R & + & 0 & + & 0 & = & 0 \\
u_2 = \sum M_A = & M_1 & + & 0 & + & M_R & + & 0 & + & 0 & = & 0 \\
u_3 = \sum Q_C = & Q_2 & + & Q_1 & + & 0 & + & 0 & + & -P & = & 0 \\
u_4 = \sum M_C = & M_2 & + & M_1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & = & 0 \\
u_5 = \sum Q_B = & 0 & + & Q_2 & + & 0 & + & Q_R & + & 0 & = & 0 \\
u_6 = \sum M_B = & 0 & + & M_2 & + & 0 & + & M_R & + & 0 & = & 0
\end{array}
\qquad (1)
$$

здесь u_i - номер уравнения равновесия.

Для каждого элемента можно определить список индексов. Список индексов указывает в какие уравнения дает вклад каждый элемент. т.е.

№ эл. Список индексов (номера уравнений)

	S(1)	S(2)	S(3)	S(4)
1	1	2	3	4
2	3	4	5	6

Для решения задачи одних только уравнений равновесия недостаточно, так как задача статически неопределима. В этом случае, составляются еще и геометрические уравнения. Для их получения, необходимы зависимости между узловыми усилиями и узловыми перемещениями. Для получения этих зависимостей, можно использовать дифференциальные уравнения изгиба балки.

Из курса сопротивления материалов нам известно, что дифференциальное уравнение изгиба имеет вид

$$\frac{d\phi_x}{dx} = \frac{M_x}{EJ} \qquad (2)$$

где ϕ_x - угол поворота сечения *x*, а M_x - изгибающий момент в сечении *x*.

Определим выражения для Q_1, M_1, Q_2, M_2

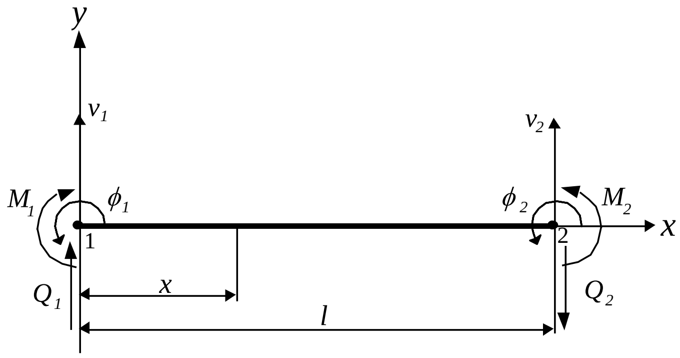


Рис.2

из рис.2 видно, что изгибающий момент в сечении *x* равен $M_x = Q_1 x + M_1$, теперь решая дифференциальное уравнение (2) получим

$$\int d\phi_x = \int \frac{M_x}{EJ} dx$$

$$\int d\phi_x = \int \frac{Q_1 x + M_1}{EJ} dx$$

$$\phi_x = \frac{1}{2}\frac{Q_1 x^2}{EJ} + \frac{M_1 x}{EJ} + C_1, \quad \text{при } x = 0,\ \phi_ч = \phi_1,\ C_1 = \phi_1$$

тогда

$$\phi_x = \frac{1}{2}\frac{Q_1 x^2}{EJ} + \frac{M_1 x}{EJ} + \phi_1 \qquad (3)$$

прогиб v_x в сечении *x* определим из уравнения $\dfrac{dv_x}{dx} = \phi_x$,

$$\int dv_x = \int \phi_x dx$$

$$v_x = \frac{1}{6}\frac{Q_1 x^3}{EJ} + \frac{1}{2}\frac{M_1 x^2}{EJ} + \phi_1 x + C_2, \quad \left(x = 0, C_2 = v_1\right) \qquad (4)$$

Запишем выражения ϕ_x и v_x при $x = l$

$$\begin{aligned} \phi_2 &= \frac{1}{2}\frac{Q_1 l^2}{EJ} + \frac{M_1 l}{EJ} + \phi_1 \\ v_2 &= \frac{1}{6}\frac{Q_1 l^3}{EJ} + \frac{1}{2}\frac{M_1 l^2}{EJ} + \phi_1 l + v_1 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{l^2}{2EJ} & \dfrac{l}{EJ} \\ \dfrac{l^3}{6EJ} & \dfrac{l^2}{2EJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\phi_1 + \phi_2 \\ v_2 - \phi_1 l - v_1 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Решая систему получим

$$Q_1 = \frac{6EJ(l\phi_2 - 2v_2 + \phi_1 l + 2v_1)}{l^3}$$
$$M_1 = -\frac{2EJ(l\phi_2 - 3v_2 + 2\phi_1 l + 3v_1)}{l^2} \qquad (6)$$

В конце балки

$$Q_2 = Q_1$$
$$M_2 = Q_1 l + M_1 \qquad (7)$$

выражения для Q_1, M_1, Q_2, M_2 можно записать в матричном виде

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ -6l & -4l^2 & 6l & -2l^2 \\ 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \qquad (8)$$

Запись уравнений в матричном виде очень удобно при программировании, так как задачи по МКЭ сводятся к решению системы линейных уравнений. А алгоритмы разработаны с учетом того, что коэффициенты системы уравнений записываются в двумерные массивы

Учитывая направления M_1и Q_2 на рис.2 и в расчетной схеме на рис.1 надо знаки при M_1и Q_2 поменять на противоположный т.е.

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = [K][u] \qquad (9)$$

Все столбцы в уравнениях равновесия (1) можно записать в матричном виде. Например,

1 столбец

$$\begin{array}{l} S_1 = 1 \\ S_2 = 2 \\ S_3 = 3 \\ S_4 = 4 \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & 0 & 0 \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & 0 & 0 \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & & \end{array} \end{array} \begin{bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \\ v_3 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = [A]_1 [U]_1$$

2 столбец

$$\begin{array}{l} \\ \\ S_1 = 3 \\ S_2 = 4 \\ S_3 = 5 \\ S_4 = 6 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ 0 & 0 & k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ 0 & 0 & k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ 0 & 0 & k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccccc} & & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \end{array} \end{array} \begin{bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \\ v_3 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = [A]_2 [U]_2$$

Единой формулой составление матрицы $[A]$ можно записать в виде $A_{S_i S_j} = k_{ij}$, где $S_i = S(i)$ - элементы списка индексов.

Но в программах для ЭВМ массив $[A]$ не создается отдельно для каждого элемента, а создается общая матрица $[A]$ и ее элементы вычисляются по формуле $A^{n}_{s_i s_j} = A^{n-1}_{s_i s_j} + k_{ij}$, где *n*- номер текущего цикла, т.е. идет накопление. Всего число циклов равно числу элементов.

Запишем сумму 1-го и 2-го столбца

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^1_{11} & k^1_{12} & k^1_{13} & k^1_{14} & 0 & 0 \\ k^1_{21} & k^1_{22} & k^1_{23} & k^1_{24} & 0 & 0 \\ k^1_{31} & k^1_{32} & k^1_{33}+k^2_{11} & k^1_{34}+k^2_{12} & k^2_{13} & k^2_{14} \\ k^1_{41} & k^1_{42} & k^1_{43}+k^2_{21} & k^1_{44}+k^2_{22} & k^2_{23} & k^2_{24} \\ 0 & 0 & k^2_{31} & k^2_{32} & k^2_{33} & k^2_{43} \\ 0 & 0 & k^2_{41} & k^2_{42} & k^2_{43} & k^2_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ v_2 \\ \phi_2 \\ v_3 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = [A][U] \Leftrightarrow [A][U] = [B]$$

Учитывая, что $v_1 = 0, \phi_1 = 0, v_3 = 0, \phi_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k^1_{13} & k^1_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^1_{23} & k^1_{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^1_{33}+k^2_{11} & k^1_{34}+k^2_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^1_{43}+k^2_{21} & k^1_{44}+k^2_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^2_{31} & k^2_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^2_{41} & k^2_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_2 \\ \phi_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [A][U] \Leftrightarrow [A][U] = [B]$$

Для 3 столбца Для 4 столбца

$$\begin{bmatrix} Q_R \\ M_R \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_R \\ M_R \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_R \\ M_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_R \\ M_R \end{bmatrix}$$

Подставляя выражения для 1,2,3 и 4 столбцов, в уравнения равновесия и проводя суммирование, получим

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & k^1_{13} & k^1_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k^1_{23} & k^1_{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^1_{33}+k^2_{11} & k^1_{34}+k^2_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^1_{43}+k^2_{21} & k^1_{44}+k^2_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^2_{31} & k^2_{32} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k^2_{41} & k^2_{42} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^A_R \\ M^A_R \\ v_2 \\ \phi_2 \\ Q^B_R \\ Q^B_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow [A][U] = [B]$$

Просмотрев структуру системы уравнений можно увидеть, что для определения неизвестных перемешений v_2, ϕ_2, нужно взять 3 и 4 уравнения.

$$\begin{bmatrix} k^1_{33}+k^2_{11} & k^1_{34}+k^2_{12} \\ k^1_{43}+k^2_{21} & k^1_{44}+k^2_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow [A][U] = [B]$$

Следовательно, систему уравнений можно составлять только для неизвестных перемещений. Для этого нумеровать нужно только неизвестные перемещения. В этом случае список индексов имеет вид

№ элемента	Список индексов			
	S(1)	S(2)	S(3)	S(4)
1	0	0	1	2

2 1 2 0 0

Разработка программы расчета.

В программах на ЭВМ построение матрицы $[A]$ записывается следующим образом

```
10  DIM K(4,4)      массив для матрицы [K]
20  DIM S(4)        массив для списка индексов [S]
30  READ N, NE      ввод числа уравнений и элементов
35  DIM A(N,N)      массив для матрицы [A]
40  FOR J = 1 TO NE            цикл по элементам
50    READ S(1),S(2),S(3),S(4) ввод списка индексов матрицы
                               (адреса матрицы [K] в
                               матрице [A])
60    READ DL, EI              ввод длины и жесткости
70    T = EI / DL^3            коэффициент при матрице [K]
      матрица жесткости
80    K(1,1)=12:   K(1,2)=6*DL:   K(1,3)=-12:   K(1,4)=6*DL
90    K(2,1)=6*DL: K(2,2)=4*DL^2: K(2,3)=-6*DL: K(2,4)=2*DL^2
100   K(3,1)=-12:  K(3,2)=-6*DL:  K(3,3)=12:    K(3,4)=-6*DL
110   K(4,1)=6*DL: K(4,2)=2*DL^2: K(4,3)=-6*DL: K(4,4)=4*DL^2
      сборка матрицы [A]
120   FOR L = 1 TO 4
130    FOR M = 1 TO 4
140     A(S(L), S(M)) = A(S(L), S(M)) + K(L, M) * T
150    NEXT M
160   NEXT L
170 NEXT J
```

Ввод нагрузок

Для ввода нагрузок нужно составить матрицу нагрузок $[B]$ и ввести ее в ЭВМ Программа для ЭВМ для ввода матрицы нагрузок имеет вид

```
180 DIM B(N)          массив для матрицы нагрузок
190 FOR J = 1 TO N
200  READ B(J)        ввод матрицы нагрузок
220 NEXT J
```

Решение системы линейных уравнений

Решение системы уравнений можно выполнить по программе.

```
230 DIM U(N)  массив для неизвестных перемещений
240 'ПРЯМОЙ ХОД
250 FOR J = 1 TO N - 1
260  FOR JJ = J+1 TO N
270   XM = A(J, JJ) / A(J, J)
280   FOR I = JJ TO N
290    A(JJ, I)=A(JJ,I)-A(J,I)*XM
300   NEXT I
310   B(JJ) = B(JJ) - B(J) * XM
320  NEXT JJ
330 NEXT J
340 'ОБРАТРЫЙ ХОД
350 U(N) = B(N) / A(N, N)
360 FOR J = N - 1 TO 1 STEP -1
```

```
370  SUM = 0
380  FOR I = J + 1 TO N
390   SUM = SUM + A(J, I) * U(I)
400  NEXT I
410  U(J) = (B(J) - SUM) / A(J, J)
420 NEXT J
```

Построение эпюр внутренних усилий

Эпюра моментов строится для каждого элемента отдельно по формуле $M_x = Q_1 x + M_1$, где Q_1, M_1 находится из 1 и 2 уравнения соотношения (2). Эпюра поперечных сил по формуле $Q_x = Q_1$.

```
500 RESTORE 690                 начать чтение данных с 690
                                строки
510 FOR J = 1 TO NE             цикл по элементам
520 PRINT "Element "; J         печать номера элемента
530 READ S(1),S(2),S(3),S(4)    ввод списка индексов матрицы
540  READ DL, EI                ввод длины и жесткости
550  V1=U(S(1))                 Выборка из общей матрицы переме-
560  V2=U(S(2))                 щений, перемещений относящихся
570  V3=U(S(3))                 к данному элементу
580  V4=U(S(4))
590  FOR X = 0 TO DL STEP (DL / 6) Эпры строятся в 7 точках
600   Q1=EI/DL^3 * (   12*V1 +   6*DL*V2 -   12*V3   + 6*DL*V4)
610   M1=EI/DL^3 * (-6*DL*V1 - 4*DL^2*V2 + 6*DL*V3 - 2*DL^2*V4)
620   M = Q1*X + M1
630   Q = Q1
640   PRINT "x=";X, "M=";M, "Q=";Q  вывод результатов
650  NEXT X
660 NEXT J
670 END                         конец программы
```

Исходные данные к примеру.

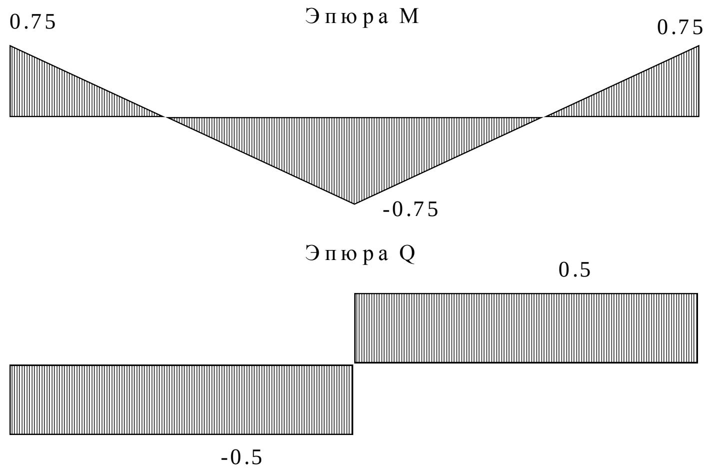
```
680 DATA 2,2            число уравнений, число элементов
690 DATA 0,0,1,2        список индексов для 1-го элемента
700 DATA 3,1            длина и жесткость EI для 1-го
                        элемента
710 DATA 1,2,0,0        список индексов для 2-го элемента
720 DATA 3,1            длина и жесткость EI для 2-го
                        элемента
730 DATA 1,0            элементы матрицы нагрузок
```

Для прведения расчета надо собрать текст программы, убрать боковые комментарии и выполнить ее используя программу "gwbasic.exe" или другую программу использующую язык BASIC.

Результаты расчета.

```
Element  1
x= 0          M= .75        Q=-.5
x= .5         M= .5         Q=-.5
x= 1          M= .25        Q=-.5
x= 1.5        M= 0          Q=-.5
x= 2          M=-.25        Q=-.5
x= 2.5        M=-.5         Q=-.5
x= 3          M=-.75        Q=-.5
```

```
Element  2
x= 0          M=-.75        Q= .5
x= .5         M=-.5         Q= .5
x= 1          M=-.25        Q= .5
x= 1.5        M= 0          Q= .5
x= 2          M= .25        Q= .5
x= 2.5        M= .5         Q= .5
x= 3          M= .75        Q= .5
Ok_
```



Приложение 2