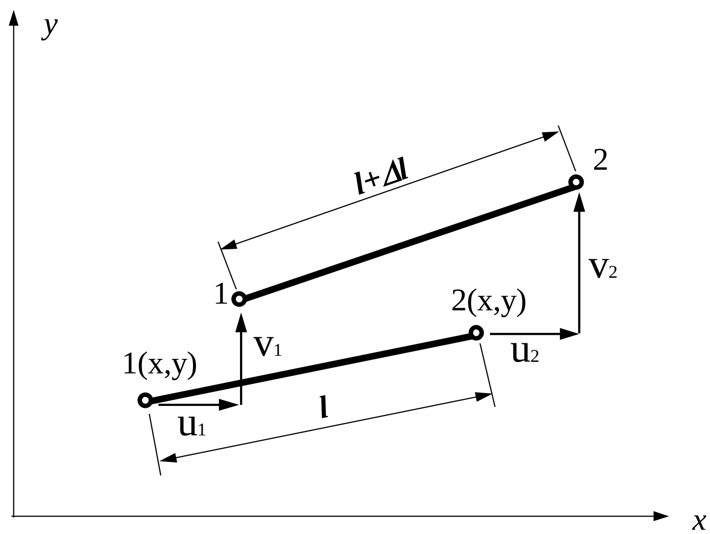
Элемент плоской фермы.

Фермой называется стержневая система, остающаяся геометрически неизменяемой после условной замены её жестких узлов шарнирными.

Рассмотрим элемент, с помощью которого можно рассчитывать фермы. Этот элемент имеет произвольную ориентацию в плоскости



Зная координаты $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ концов 1 и 2 стержня, можно определить его длину l и направляющие косинусы ***c, s:***

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$c = \cos\alpha = (x_2 - x_1)/l$$
$$s = \sin\alpha = (y_2 - y_1)/l \qquad (14)$$

Перемещения стержня определяется составляющими $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ перемещений его концов. Сгруппируем их в один вектор столбец

$$\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \qquad (15)$$

Удлиннение стержня равно проекции разности перемещений его концов на ось стержня

$$\Delta l = (u_2 - u_1)\cdot c + (v_2 - v_1)\cdot s = \begin{Bmatrix} -c & -s & c & s \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \qquad (16)$$

Если модуль упругости обозначим через E, а поперечное сечение - через F, то на основе закона Гука получим растягивающую силу

$$N = \frac{EF}{l} \cdot \Delta l \tag{17}$$

Решения задачи при отыскании узловых значений перемещений можно получить путем определения минимума функции потенциальной энергии. Потенциальная энергия системы может быть представлена как сумму потенциальных энергий каждого элемента т.е.

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n} \Pi_i$$

Полная потенциальная энергия конечного элемента Π_i может быть представлена в виде

$$\Pi_i = V_i - A_i \tag{18}$$

где *V*- энергия деформации, *A*- работа узловых сил.

Энергия деформации равна

$$V = \frac{1}{2} N \Delta l = \frac{EF}{2l} (\Delta l)^2 =$$

$$= \frac{EF}{2l} \{u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2\} \begin{Bmatrix} -c \\ -s \\ c \\ s \end{Bmatrix} \{-c \quad -s \quad c \quad s\} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \{u\}^{\mathrm{T}} \cdot \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} cc & cs & -cc & -cs \\ sc & ss & -sc & -ss \\ -cc & -cs & cc & cs \\ -sc & -ss & sc & ss \end{bmatrix} \cdot \{u\} = \frac{1}{2} \{u\}^{\mathrm{T}} [\mathbf{k}] \{u \qquad \mathbf{(19)\}}$$

Работа узловых сил равна

$$A = \{P\}^{\mathrm{T}} \{u\} \tag{20}$$

Чтобы минимизировать величину *П*, продифференциируем её по {u} и приравняем результат нулю.

Окончательно будем иметь

$$[\mathbf{k}]\{u\} = \{p\} \tag{22}$$

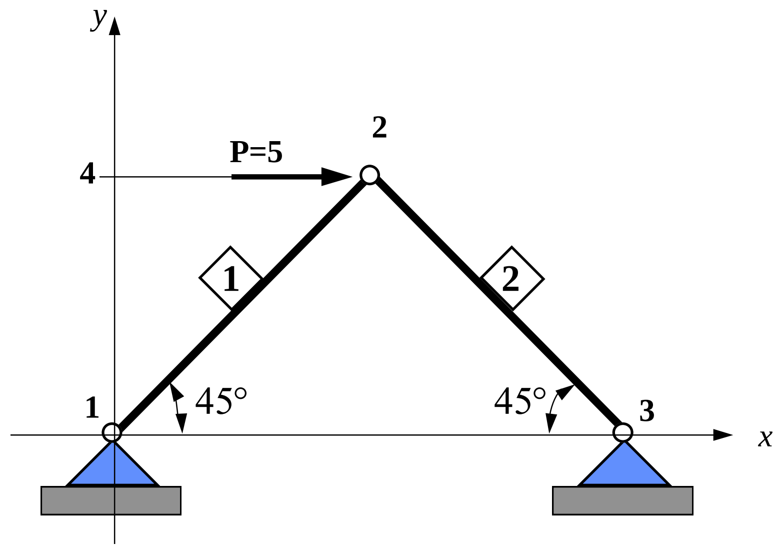
Для всей системы

$$[\mathbf{K}]\{U\} = \{P\}, \qquad [\mathbf{K}] = \sum_{i=1}^{n} [\mathbf{k}]_i \tag{23}$$

$\{P\}$ - глобальный вектор нагрузок

n - число конечных элементов.

Задача. Определить перемещения 2 узла фермы показанной на чертеже.



Определим координаты узлов

	1	2	3
x	0.0	4.0	8.0
y	0.0	4.0	0.0

Длины 1 и 2 элемента соответственно равны

$$l_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4-0)^2 + (4-0)^2} = 5.66$$

$$l_2 = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} = \sqrt{(8-4)^2 + (0-4)^2} = 5.66$$

а косинусы и синусы элементов соответственно равны

$$c_1 = \mathbf{cos}\,\alpha = (x_2 - x_1)/l = 4/5.66 = 0.707$$

$$s_1 = \mathbf{sin}\,\alpha = (y_2 - y_1)/l = 4/5.66 = 0.707$$

$$c_2 = \mathbf{cos}\,\beta = (x_3 - x_2)/l = 4/5.66 = 0.707$$

$$s_2 = \mathbf{sin}\,\beta = (y_3 - y_2)/l = -4/5.66 = -0.707$$

Матрицы жесткости каждого элемента равны

$$[\mathbf{k}]_1 = \frac{1\cdot 1}{5.66}\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{k}]_2 = \frac{1\cdot 1}{5.66}\begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Просуммируем их

$$[\mathbf{K}] = \frac{1}{5.66}\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 1.0 & 0.0 & -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.0 & 1.0 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Алгоритм составления глобальной матрицы состоит из следующего. Для каждого элемента составляется вектор коэффициентов.

Например для первого элемента

1 2 3 4 ,

а для второго

3 4 5 6

Порядковый номер в векторе показывает номер члена в локальной матрице, а его значение показывает номер в глобальной матрице.

Приступим к учёту граничных условий. Из условия задачи 1 и 2, а также 5 и 6 степени свободы закреплены, т.е перемещения 1,2,5,6 равны нулю. Поэтому в системе уравнений обнуляются элементы соответствующие этим степеням свободы.

Чтобы в программах не делать удаление строк и столбцов соответствующие закрепленным степеням свободы, нужно нумеровать только неизвестные перемещения. Т.е.

для первого элемента

0 0 1 2 ,

а для второго

1 2 0 0

Вектор нагрузок будет равен

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Система линейных уравнений и ее решение имеет вид

$$\frac{1}{5.66}\begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 28.28 \\ 0.0 \end{Bmatrix}$$

ПРОГРАММА РАСЧЕТА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

```
10 DIM K(4, 4)    'массив для матрицы [K]
20 DIM ST(4)      'массив для списка индексов [S]
30 READ N, NE     'ввод числа уравнений и элементов
40 DIM A(N, N)    'массив для матрицы [A]
50 DIM X(2)
60 DIM Y(2)
70 FOR J = 1 TO NE    'цикл по элементам
80 REM ввод списка индексов матрицы
90 REM (адреса матрицы [K] в матрице [A])
100 READ ST(1), ST(2), ST(3), ST(4)
110 READ X(1), Y(1), X(2), Y(2)
120 READ E, A
130 REM ввод модуля упругости и площади
140 DX = X(2) - X(1): DY = Y(2) - Y(1)
150 EL = SQR(DX * DX + DY * DY)
```

```
160 EL = 1 / EL: SF = E * A * EL
170 REM построение матрицы жесткости элемента
180 C = DX * EL: S = DY * EL
190 CC = C * C: SS = S * S: CS = C * S
200 REM матрица жесткости
210 K(1, 1) = CC:  K(1, 2) = CS:  K(1, 3) = -CC: K(1, 4) = -CS
220 K(2, 1) = CS:  K(2, 2) = SS:  K(2, 3) = -CS: K(2, 4) = -SS
230 K(3, 1) = -CC: K(3, 2) = -CS: K(3, 3) = CC:  K(3, 4) = CS
240 K(4, 1) = -CS: K(4, 2) = -SS: K(4, 3) = CS:  K(4, 4) = SS
250 REM сборка матрицы [A]
260   FOR L = 1 TO 4
270    FOR M = 1 TO 4
280     A(ST(L), ST(M)) = A(ST(L), ST(M)) + K(L, M) * SF
290    NEXT M
300   NEXT L
310 NEXT J
320 REM Ввод нагрузок
330 DIM B(N)          'массив для матрицы нагрузок
340 FOR J = 1 TO N
350  READ B(J)        'ввод матрицы нагрузок
360 NEXT J
370 REM Решение системы линейных уравнений
380 DIM U(N)  'массив для неизвестных перемещений
390 'ПРЯМОЙ ХОД
400 FOR J = 1 TO N - 1
410  FOR JJ = J + 1 TO N
420   XM = A(J, JJ) / A(J, J)
430   FOR I = JJ TO N
440    A(JJ, I) = A(JJ, I) - A(J, I) * XM
450   NEXT I
460   B(JJ) = B(JJ) - B(J) * XM
470  NEXT JJ
480 NEXT J
490 'ОБРАТРЫЙ ХОД
500 U(N) = B(N) / A(N, N)
510 FOR J = N - 1 TO 1 STEP -1
520  SUM = 0
530  FOR I = J + 1 TO N
540   SUM = SUM + A(J, I) * U(I)
550  NEXT I
560  U(J) = (B(J) - SUM) / A(J, J)
570 NEXT J
580 '**** ВЫВОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ****
590 FOR I = 1 TO N
600  PRINT USING "U(##)=##.#########"; I; U(I)
610 NEXT I
620 END
630 REM Исходные данные к примеру.
640 DATA 2,2
650 DATA 0,0,1,2
660 DATA 0,0,4,4
670 DATA 1,1
680 DATA 1,2,0,0
690 DATA 4,4,8,0
700 DATA 1,1
710 REM элементы матрицы нагрузок
720 DATA 5,0
```